鷄がないた。天狗は其れを聞いて口惜しいと涙を一雫落した。

伊香保から榛名神社に行く道の右手に、しらぢ池といふ擂鉢形の凹みがそれであつて、土を取つた跡が榛名湖だといふ。そして今一番で本物の富士山と同じに成るといふのでその山を一番山といふ様になつたといふ。

地球の楕圓率に就いて

熊谷直一

之れは大正十五年四月施行の第四十四回文檢地理豫備試験問題の中の一つとして出された「地球の楕圓率に就いて説明せよ」といふ問題に對して幾分解説の目的で書いて見たものであるが目下十分の時間を持つて準備をなし得ない事情にある爲めに幾多不備の點のあることを甚だ遺憾に思ふ。

第十七世紀の末期に於てニウトン及ハイゲンスの地球の形に關する研究が出て以來、地球は赤道面が膨れ出してゐる扁平廻轉楕圓體であることが次第に承認せられて來た。地球の楕圓率(ellipticity)といふのはこの扁平廻轉楕圓體の赤道半徑aと極半徑bとの差をaで除したもの即ち$(a-b)/a$を指したものであつて、ε或はeといふ文字で表はしてある。之れは又扁平度(flattening)とも稱してゐる。扁平度と言ふ時は特にfといふ文字で表はしてあるが、獨逸の書物にはAbplattungを畧したα又はpといふ文字がよく用ひられてゐるこれは扁平廻轉楕圓體が球形とどの位相違してゐるかを示す一つの尺度である。楕圓率を決定する方法や計算に用ひた材料の相違などによつて楕圓率即扁平度の値は少しづゝ違つてゐるが、何れも1/297といふ値に近いものであつて、特殊の研究以外には地球の扁平度と言へばこの値が採用せられてゐる様である。二九七分の一と言へば隨分小さいものであつて若し半徑約三〇糎の地球儀を作るとすれば赤道半徑と極半徑との差は僅か一粍程のものとしかならない。然し地球表面上の精密な測量にとつては決して無視出來ないものであり、又地軸の所謂歳差運動といふものは地球が僅かながらこの扁平度を持つてゐる爲めに起る現象である。楕圓率又は扁平度を用ふる代りに時々離心率(eccentricity)と呼ばれる$\sqrt{a^2-b^2}/a$なる量を用ふることがある。之は楕圓率と同様にe又はεで表はされてゐる爲めに無造作に書物を開いた時などはよく楕圓率と混同する虞れがあるから注意せねばならない。楕圓率をεとし離心率をeとすれば兩者の間には$(1-\varepsilon)^2=1-e^2$なる關係があるから一方を知れば他は直ち

求めることが出來る。

地球の楕圓率に就いて述べるに當つて地球形態論變遷の小歴史に觸れつゝ筆を進めて見たい。

既に西暦紀元前六百年の昔、水を萬物の本源なりと考へた渠のターレス（Thales）は地球は諸の天體と同樣なものであるといふ現代宇宙論の眞髓に觸れた卓見を懷いてゐたことは實に大なる驚異である。この考の中に地球は球形であるといふ事が暗默の内に承認せられてゐることを明かに察知することが出來る。その後紀元前四百年の頃になつてピタゴラス學派の人によつて地球球形説が唱道せられ、遂にアリストテレス（Aristoteles）に至つて球形説の證據となる事實が擧げられた。曰く、(1)高所に登るにつれて視界が段々廣くなること、(2)地球上を南北に移動すると北辰の高度が變はること、(3)月蝕は月面に於ける地球の影であつてその影の球形であること等である。科學的常識を豊富に惠まれてゐる賢明なる現代人は右の(1)及(2)の事實は地球が球形から可なり相違してゐる楕圓體であつても妥當であり、又(3)の月面に印せられた地球の影は1/297といふ樣な僅小な扁平度を到底吾々に看破せしめないものであることに直に氣が付くであらう。然し精密なる測定科學の萠芽さへなかつた當時としては、月面に於ける地球の影などは當時の先覺者に取つてさへ地球を眞に球形と信ずべき實に驚嘆に値した證據であつたに相違ない。この地球々形説は十七世紀の末葉まで別に疑義を受けることなく墨守せられて來て、その間各地で色々な人々によつて球形の大さの要素たる地球の直徑や子午線の一象限の長さ等の測定が行はれたのである。所が十七世紀　末期に至つてアリストテレス以來の信條たるこの球形説が崩れ始めて楕圓説が持上ることになつた。これに就いては是非一言せなければならない出來事がある。之れは地球形態論の發達史の上に於て深く記念すべき事件である。

一六七一年に佛國の學士院會員（當時既にルイ十四世によつて佛國學士院　Académie　が創立せられてゐた）リシエー（Richer）が巴里で正しく調節して置いた振子時計を携へて北緯五度附近にある南米のカイエンヌ島（Ile de Cayenne 之れは今の佛領ギヤナの海岸にある小さな島でカイエンヌといふ港町がある）に出張して天文觀測に從事したのである。所がこの地で計らずも其時計が少し遲れる樣になつてゐることを發見した。そこで振子の長さを短くして始めて正しい時を示す樣になつた。再び巴里に持つて歸つて見ると又舊の長さに戻さなければならなかつた。此豫期せざる偶然の事件に對して佛國の學者達は色々奇妙な臆説を設けてその説明に腐心したのであるが、かの英國のニウトンはこの出來事の正しき事實なることを直ちに承認したのである。何故であるか。この頃彼はかの引力論を應用して、地球を均一密度の廻轉楕圓體なりと假定し巧妙なる假想的實驗を考へて、この廻轉楕圓體は赤道面が膨れ出してゐる扁平廻轉楕圓體であるべきことを結論し其楕圓率即扁平度として1/230といふ現今認められてゐる1/297といふ値より少し大なる値を得てゐたのである

所が振子の週期が一定なる場合は振子の長さ嚴密に言ふならば其振子と同一週期を有する單一振子の長さは其地點の重力の強さに正比例するものであるから、リシエーがカイエンヌで時計の振子を短くせなければならなかつたのは正に其地の重力が遙かそれよりも高緯度にある巴里の重力よりも小である爲めであつたのである。高緯度の重力が低緯度の重力よりも大であるといふ關係は地球が扁平廻轉楕圓體であるといふニュトンの結果から考へ付くことであつて、彼がリシエーの結果を躊躇なく承認したことは極めて自然であり、旁々彼自身に於ては自分の理論の正しきことをリシエーによつて立證せられたことにもなつたのである。尤も地球が完全な球體であつても赤道に於ける重力は遠心力の爲めに高緯度の地よりも小であるべき筈であるが、唯夫れ丈ではリシエーの結果の數量的説明は出來なかつたのでどうしても高緯度の地は赤道地方よりも地球中心に近いと言ふ扁平楕圓體説を認めなければならなかつたのである。この當時和蘭のハイゲンス（Huygens）も矢張り地球の形を論じて地球内部の密度分布に關してニュトンとは餘程異つた假定の下に計算を行つて扁平度の値として1/587といふ餘程小さな値を與へた。このニュトン及ハイゲンスの扁平廻轉楕圓體説は十八世紀になつて佛國のカシニ（Cassini）によつて完成せられた巴里を通過する地球子午線の短少なる部分の測量の結果一時一寸疑はれる樣になつたけれども、同世紀の中葉になつて佛國政府が南米のペルー高原と北極地方のラプランドとに子午線測量を更にやり換へる目的で二組の觀測隊を派遣して得られた結果によつて扁平廻轉楕圓體説は遂に疑ふ餘地なきものとなつたのである。

子午線測定事業はメートル法制定前後の頃から次第に盛になり、十九世紀に入つてからこの方面の材料が多數集積した子午線測量によつて廻轉楕圓體の大さと形とを決定する方法は次の樣な基本式による。

$$R=\frac{ds}{d\beta}=\frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\beta)^{3/2}}$$

茲にβは地理學的緯度即ち廻轉楕圓體の面に垂直なる直線が赤道面となす角で、a及eは夫々求めんとする赤道半徑及離心率である。Rは地理學的緯度βなる點に於ける子午線の曲率半徑であつて之はβの弧度一度の變化に應ずる子午線の長さsの變化する割合即$\frac{ds}{d\beta}$に等しいものであつて之れが子午線測量に關係して來る量である。然し實際の測量ではsの相當長い長さと天文觀測に依つてその兩端に於ける緯度β_1とβ_2とを決定するのであるから、實際用ふる式は前式をβ_1からβ_2まで積分したる形を用ひなければならないのである。何れにしても未知數はa及e^2の二つであるから緯度を異にする二つの地に於ける觀測さへあれば十分であるが、緯度を色々異にする多數の地に於ける觀測があつて其等を凡て用ひんとする時には未知數の數よりも方程式の數の方が非常に多くなつて方程式論に拘泥してゐる間は之れは容易に取扱へない問題である。所が幸にも此當時既に獨逸のガウス（Gauss）によつてかゝる問題を極めて合理的に解くかの最小自乘法が大成せ

られてゐたのである。この最小自乘法を應用して多數集積した子午線測量の實測値から其等に最も良く融和する廻轉楕圓體の大さと形さを計算したのは獨逸のベッセル(Bessel)次いで英國のクラーク(Clarke)であつて、兩氏の計算して出したものが扁平廻轉楕圓體を與へた事は申述べるまでもない。ベ氏の出した楕圓體をベッセルの楕圓體 (Bessel's Ellipsoid) ク氏の出したのをクラークの楕圓體 (Clarke's Ellipsoid)と稱して爾來長らく測地學上に實際用ひられて來てゐるものである。

リシェーの時計事件をニウトン及ハイゲンスの理論の結果と照し合はせて見れば、地球上の重力分布を測ることによつて地球の楕圓率の大さが見出されるであらうといふ暗示を得るやうである。實際此の關係を明確に論じたのはクレーロー(Clairaut)の有名なる地球形態論 (Théorie de la figure de la terre, Paris 1743) である。尤も十七世紀の末頃既に著明なる學者間では振子は地球の形を研究する上に一つの有効なる器械であらうといふ考が行はれてをり偶まリシェーの時計事件出づるに及んでこの考へは非常な刺激を受けたものであるが、右の考へを立派に大成して後世重力分布論の先驅をなしたのは實にクレーローに歸せなければならない。彼は地球を廻轉楕圓體なりとし内部の密度分布は半徑の方向には違ふが表面と同心同軸の楕圓體の面上に於ては同一であるといふ現今の立場より見ても極めて穩當な然も一般的な假設を置いて地球表面上の重力分布は $g=g_0\,(1+\alpha\,\mathrm{Sin}^2\beta)$ によつて表はさるべきを示し（g_0は赤道に於ける重力、βは地理學的緯度、αは或恒數である）、且楕圓率を與ふる式として有名なるクレーローの定理(Clairaut's Theorem) $\varepsilon=\frac{a-b}{a}=\frac{5}{2}\frac{f_0}{g_0}-\frac{k}{g_0}$ を導出した。f_0は赤道に於ける遠心力であつて赤道半徑と地球の自轉速度とより決定出來る。勿論赤道半徑の大さは別に測地學的に見出されたものを採用せねばならぬ。kは極に於ける重力より赤道に於ける重力を差引いたものである。右の兩式は實際の重力分布や楕圓率の値を良く表はしてゐるものであつて、クレーローの理論は後世この方面の研究の基礎となつたものである。

その後數理物理學の發達と共にクレーローの理論は次第に擴張せられて地球形態論は一方重力分布論と相關聯して著しき發展をなした。同時に地球の形といふものゝ意味も地球楕圓體 (Erdellipsoid) といふものを取扱ふ樣になつて極めて明瞭なものになつた。地球楕圓體といふのはゼオイド (Geoid) の面と最もよく融合する廻轉楕圓體を指して云ふのである。茲にゼオイドといふのは平均海水面をその一部分としてゐる所の地球の水準面即等ポテンシヤル面の事であつて、之れは扁平廻轉楕圓體に極く近い形をしてゐる。地球上の色々の緯度に於ける重力の實測値を適當に處理してゼオイド面上の値に換算したものを多數綜合して、獨逸のヘルメルト(Helmert)は地球楕圓體の面上に於ける重力の分布を與ふる式として一九〇一年に次の式を得た。

$$\gamma_0=978.046(1+0.005302\sin^2\beta-0.000007\sin^2 2\beta)$$

この式の割弧内の第三項を省略すればクレーローの重力分布式になる。第二項の係數 0.005302は式を見れば直ちに分る樣に極に於ける重力から赤道に於ける重力を差引いたものを後者で除したもの即ちクレーローの定理のk/g_0に等しいものであつて之は理論的に $\frac{5}{2}m-\varepsilon-\frac{17}{14}m\varepsilon=0.005302$ なる關係を有してゐる。茲にmはクレーローの定理に於けるf_0/g_0と同じものである。之の式も左邊の第三項を省略すればクレーローの定理になる。ヘルメルトはmの値として 0.0034677 を採用して右の式より楕圓率の値を1/298.25 と出した。右に示した重力分布式の第一因子即赤道重力の値はその後少し改正せられて 978.030 といふ値が採用せられる樣になつた。この式によつて計算せらるゝ重力が地球上の所謂標準重力(Normal values of gravity)と稱せらるゝものである。各地で實測せられたヂオイド面上の重力の强さとこの標準重力との差は現今やかましく言はれてゐる地殼均衡問題や地殼の局所的性情の研究に向つて重要なる手掛りとなつてゐるものである。

次に色々の人々によつて求められた主な楕圓體の赤道半徑極半徑、平均半徑及楕圓率の値を列擧しやう。

楕圓體の名稱	年	赤道半徑 a	極半徑 b	平均半徑 $\sqrt[3]{aab}$	楕圓率(扁平度) $(a-b/a)$
Bessel	1841	6377397m	6356079m	6370283m	1/299.15
Clarke	1866	6378206	6365584	6370990	1/295.0
Clarke	1880	6378249	6356515	6370996	1/293.47
Helmert	1907	6378200	6356818	6371064	1/298.35
Hayford	1909	6378388	6356909	6371220	1/297.0

最後のヘーフォードの楕圓體は茲には述べなかつたが垂直線偏倚（地球楕圓體の面上に於て或點に立てた垂線と同じ點に於てヂオイド面に立てた垂線との間の角）の測定値を整理して導出されたものであつて之れは特に地殼の均衡狀態に對する補正を加へられてある故にこの點は現今の學說より見て最も適當なるものと思へるが、垂直線偏倚の觀測の場所が米國丈けに限られてゐる爲めに普れく地球全體にわたつて用ふるには不穩當だといふ批難を受けてゐるものである。然しこの楕圓體は一九二四年の九月より十月にかけてスペインのマドリードで開催せられた第二回萬國測地學及地球物理學總會の測地學分科會に於て色々討議研究せられた結果この楕圓體を今後地球の萬國的標準形として認むることになり、新らしく測地事業を起す際等にはこの標準形を採用すべきことが協定せられた。この事に關しては地球第三卷第五號に掲載せられてある松山教授の右總會に關する報文、又は一九二四年の Nature No.2871, Vol. 114, p. 697 を一讀せられ度い。

最後にベッセル楕圓體を用ひて計算せられた地球楕圓體の色々な要素を列擧すれば次の通りである。

赤道の周圍の長さ　＝　40,070.4粁
地球子午線の長さ　＝　40,003.4粁
地球子午線の一象限の長さ　＝　10,000,859米
赤道に於ける緯度一度の長さ＝　111,307米
地球子午線一度の長さ｛極　(89°－90°迄)＝111,680米
　　　　　　　　　　　中間　　　　　　＝111,121米

（赤道(0°—1°迄）＝110,564米
地球楕圓體の｛全表面＝509,950,714平方粁
　　　　　　｛全容積＝1,082,841,300,000立方粁

猶地球の楕圓率は地球内部の密度分布とも密接な關係を持つてをつて、この方面の研究も重要視せられてゐる。又地球楕圓體を地軸のまはりの廻轉圓楕體であるとする代りに最も一般的なる三軸楕圓體としての研究もあるのであるが、これ等に關しては何れ改めて筆を執り度いと思ふ。

此の稿を起すに當り左の書物に色々負ふ所が大であつた。

寺田寅彦：　地球物理學
S. Günther: Handbuch der Geophysik Bd. I. 20 Aufl
M. P. Randzki: Physik der Erde
A. Prey, C. Mainka, E, Tams: Einführung in die Geophysik
H. Wagner: Lehrbuch der Geographie I. Bd., I. Teil. 10. Aufl.
Th. Albrecht: Formeln und Hilfstafeln für geographische Ortsbestimmungen 4. Aufl.

地理教材としての地形圖（第二十四）

熊野川沿岸地方と紀州の東南海岸

陸地測量部二十萬分一地形圖田邊、同五萬分一地形圖十津川、新宮、那智、串本、地質調査所二十萬分一地質圖、那智圖幅、參照

紀伊の東南、熊野地方は、歴史的には神武天皇の御東征以來、鎌倉時代から南北朝にかけ、種々の事件の起つた處で、史的名勝が頗る多く地文的には橋杭岩、那智の瀑布、瀞八丁、湯之峰温泉等が著名で、又經濟的には山林に木材、海に海産物の豊富を以て遠近に知られ、熊野炭田の無烟炭も、亦近畿地方中他に無い特産物である。斯く種々の點から頗る注意に値する地方であるのに、實地は踏査した人の比較的少ないのは、其位置の僻遠と、交通の不便とに因るだらうと思はるゝ。

陸路の交通は、大和の五條から山越ねして十津川の上流に出で、川に沿ふて下るにしても、又西海岸の田邊町から周參見に出て、海岸道路を辿るにしても、道路はあしく、山坂は多く、